Warum leben wir nicht ewig?[1]

RUMA FALK, JERUSALEM

[1] aus: *Teaching Statistics* 31 (2009), 3, S. 78–80
Übersetzung: JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

Zusammenfassung: *Je älter man wird, umso mehr überschreitet die eigene Lebenserwartung die durchschnittliche Lebenserwartung (bei Geburt) in der Bevölkerung. Dennoch ist die Lebenszeit endlich. Dieses offensichtliche Paradoxon wird analysiert unter Bezugnahme auf empirische demographische Daten.*

1 Einleitung

Diese Frage ist statistisch gemeint, nicht medizinisch. Es begann alles vor einigen Jahren, als ich meinem Kurs in Wahrscheinlichkeitsrechnung an der Hebräischen Universität von Jerusalem folgende Aufgabe (Falk 1993, Aufgabe 2.3.4) stellte

Für Lebendgeborene bezeichne l_x den Anteil derjenigen, die ihren x-ten Geburtstag erleben. Es sei $l_{50} = 0{,}913$ und $l_{55} = 0{,}881$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann, der 50 geworden ist, seinen 55sten Geburtstag nicht mehr erlebt.

Die Antwort, $1 - l_{55}/l_{50} = 0{,}035$, bereitete keinerlei Schwierigkeiten. Jedoch reagierte ein Student alarmiert darüber, dass die Wahrscheinlichkeit seinen eigenen 50sten Geburtstag zu erleben nur 0,913 sei. Diese Zahl erschien ihm unheimlich niedrig. Glücklicherweise konnten seine Kommilitonen den 25-jährigen jungen Mann mit dem Hinweis beruhigen, l_{50} gelte nicht für ihn. Angenommen, er sei einer von 1000 neugeborenen Jungen, die vor 25 Jahren auf die Welt kamen. Da er ja schon das Alter von 25 Jahren erreicht hatte (was ja bei seiner Geburt keine Gewissheit war; einige Männer sterben, bevor sie dieses Alter erreichen), gehört er zu der Teilmenge derjenigen, die dem Tod aufgrund von Kinderkrankheiten und Unfällen entkommen sind. Der Umfang dieser Teilmenge ist 964 (gegeben dass $l_{25} = 0{,}964$). Nur 913 Personen dieser Gruppe erleben ihren 50sten Geburtstag. Daher ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, das Alter von 50 zu erreichen $l_{50}/l_{25} = 0{,}947$, was tatsächlich größer ist als 0,913.

Es bezeichne e_x die zu erwartende Restlebenszeit, d. h. die Anzahl der Jahre, die ein Individuum im Alter von x Jahren im Mittel noch zu leben hat, wie man sie in statistischen Tabellen z. B. der statistischen Ämter findet. Oft wird die in einem Land publizierte mittlere Lebenserwartung e_0 falsch interpretiert. Erwachsene im Alter von x Jahren ziehen ihr eigenes Alter von der mittleren Lebenserwartung ab, und glauben, dass $e_0 - x$ und nicht e_x ihre im Mittel noch zu erwartende Anzahl von Lebensjahren angibt. Zum Beispiel entnimmt man den Sterbetafeln für Großbritannien (UK Statistics Authority 2006) für Frauen einen Wert von $e_0 = 80{,}95$ für ein im Jahre 2006 neugeborenes Mädchen. Somit würde eine 75-jährige Frau vermuten, dass sie noch eine (Rest-) Lebenserwartung von (knapp) 6 Jahren hat. Aber dieselbe Sterbetafel gibt an, dass $e_{75} = 11{,}92$, was ungefähr zweimal so viel ist. Die Errechnung einer Lebenserwartung von 80,95 Jahren bezog sich auf die Sterberaten von Frauen allen Alters, sowohl unterhalb wie oberhalb von 75 Jahren, wohingegen die besagte Frau schon alle Risiken bis zum Alter von 75 überstanden hat. Ihre Lebenserwartung muss daher über 80,95 hinausgehen. Selbst für Frauen im Alter von 81, jenseits der nationalen Zahl e_0, ist die Restlebenserwartung $e_{81} = 8{,}28$. Auch wenn x wächst, wird eine positive Restlebenszeit bestehen bleiben. Dies scheint nie aufzuhören (z. B. $e_{100} = 2{,}13$). Da mag man sich wundern, wie es kommt, dass wir irgendwann tot sind.

2 Zwei ungleiche Rennen

Genau wie Achilles (A) die Schildkröte (S) überholt, so holt (in Anspielung auf Schuberts Streichquartett) der Tod (T) schließlich das Mädchen (M) ein. Angenommen A läuft zehnmal schneller als S, und S hat einen Vorsprung, so dass A eine Stunde braucht, um zum Anfangspunkt von S zu kommen. Als nächstes wird A den Ort in 6 Minuten (= 0,1 Stunden) erreichen, an dem S nach einer Stunde war, und den Ort, an dem S nach 1,1 Stunden ist in weiteren 0,01 Stunden, usw. Die Dauer dieser sukzessiven Phasen (in Stunden) bilden eine unendliche abnehmende geometrische Folge: 1; 0,1; 0,01; … mit dem Quotienten $q = 0{,}1$. Die Folge konvergiert gegen die Summe 1/0,9. Somit wird A in 1 1/9 Stunden nach dem Start S eingeholt haben.

Die parallele Folge für das T – M Rennen kann unter Bezug auf die Sterbetafeln aus Großbritannien errechnet werden, die e_x für ganzzahlige x zwischen 0 und 100 auflisten. Um zu sehen, wie dieses Rennen im wirklichen Leben (oder besser, im wirklichen Sterben) voranschreitet, nehmen wir in Analogie zum Vorsprung für S an, dass T erst mit der Verfolgung von M beginnt, wenn M ihre Lebenserwartung bei Geburt (d. h. 80,95 Jahre) erreicht hat. Wie im Fall des langsam sich bewegenden S, so haben Frauen, die dieses Alter erreichen, eine positive Restlebenserwartung. Dasselbe ist wahr für die, die auch den zweiten Meilenstein erreicht haben, und so weiter. Die Lebenserwartungen für gebrochene Werte von x kann per linearer Interpolation zwischen den Erwartungen der beiden benachbarten ganzen Zahlen geschätzt werden. Fangen wir beispielsweise mit $e_{80} = 80{,}95$ an, so wird $e_{80,95}$ als 8,31 geschätzt, indem zwischen $e_{80} = 8{,}83$ und $e_{81} = 8{,}28$ interpoliert wird. Als nächstes berechnet man die Restlebenserwartung für das Alter 80,95 + 8,31 = 89,26, indem zwischen e_{89} und e_{90} interpoliert wird, was zu $e_{89,26} = 4{,}58$ führt. Die Lebenserwartung, die man durch sukzessive Schritte des Anwendens dieser Methode und der Alter, denen sie entspricht, erhält, ist in den ersten zwei Spalten von Tabelle 1 wiedergegeben (die exakten Resultate wurden auf die zweite Dezimalstelle gerundet).

Wie man Tabelle 1 entnimmt, bildet die Kette der sukzessiven e_x Werte eine abnehmende Folge. Sie ist endlich, da die Sterbetafel bei $x = 100$ aufhört. Es bleibt zu argumentieren, dass die nicht berichteten Erwartungen für höhere Alter weiterhin abnehmen. Selbst wenn die positiv abnehmenden Erwartungen unendlich weitergehen, ist der springende Punkt hier, dass die Reihe zu einer endlichen Summe konvergiert, weil man zeigen kann, dass ihre Glieder – eines nach dem anderen – kleiner werden als die korrespondierenden Glieder einer unendlich abnehmenden geometrischen Folge. Somit bildet die Summe der letzteren Folge eine obere Grenze für jedermanns Lebenserwartung.

Alle Quotienten zwischen sukzessiven e_x in Tabelle 1 sind kleiner als 0,9. Daher bildet der Grenzwert einer unendlichen abnehmenden geometrischen Reihe, dessen erstes Glied 80,95 und $r = 0{,}9$ ist, eine konservative obere Grenze für die mögliche Lebenserwartung. Diese Summe $S_0 = 809{,}5$ Jahre ist weniger als 969 Jahre, der mythische Langlebigkeitsrekord von Methusalem (Genesis 5:27). Offensichtlich schießt S_0 weit über das Ziel hinaus, da die anfängliche Lebenserwartung in der Reihe viel schneller abnimmt als mit einem Faktor von 0,9 (siehe Tabelle 1). Die folgenden Versuche, die obere Grenze zu schätzen, basieren alle auf den Zahlen aus Tabelle 1, jeweils mit $r = 0{,}9$, aber sie starten bei einem mehr fortgeschrittenen Alter, z. B. $S_{80,95} = 80{,}95 + 8{,}31/0{,}1 = 164$. $S_{89,26}$ bis $S_{99,70}$ sind auf ähnliche Weise errechnet. Diese geschätzten oberen Grenzen der erwarteten Langlebigkeit erscheinen in der dritten Spalte mit der Überschrift S_x.

Alter x	Lebenserwartung e_x	Geschätzte (erwartete) Grenze der Langlebigkeit S_x
0	90,95	809,5
80,95	8,31	164
89,26	4,58	135
93,84	3,26	126
97,10	2,60	123
99,70	2,18	122
101,88		

Tab. 1: Geschätzte Lebenserwartung und obere Grenze der erwarteten Langlebigkeit von Frauen als Funktion des Alters

Zufälligerweise ist die letzte geschätzte Grenze $S_{99,70}$ gerade identisch mit dem Langlebigkeitsrekord von 2007. Wikipedia, die freie Enzyklopädie berichtet, dass die Rekordhalterin Jeanne Calment im unbestrittenen Alter von 122 Jahren gestorben ist. Und die Reihe der S_x-Werte scheint sich der sprichwörtlichen jüdischen Segnung von 120 anzunähern.

3 Die Abwesenheit individueller Ausreißer

Man könnte hier einwenden, dass sich obige Analyse auf Erwartungswerte bezieht, um die herum allgemein etwas Variabilität herrscht, möglicherweise mit extremen Ausreißern. Die Frage, warum keine Individuen jenseits dieser Grenzen überleben, ist noch nicht beantwortet.

Die Wahrscheinlichkeit eines Individuums, für immer zu leben, ist der Grenzwert der Wahrscheinlichkeiten, dass jemand n Jahre überlebt wenn n gegen unendlich strebt. Um diese Wahrscheinlichkeit zu finden betrachten wir q_x, die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine Person im Alter von genau x Jahren vor Erreichen des Alters $x + 1$ stirbt. Als Ganzes wächst q_x mit x. Der letzte und größte Wert in der Sterbetafel für Frauen ist $q_{100} = 0{,}339141$. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine 100-jährige Frau weitere n Jahre überleben wird, nehmen wir an (wiederum konservativ), dass q_{100}, der Einfachheit halber mit q bezeichnet, für $x > 100$ konstant bleibt. Die Wahrscheinlichkeit ein Jahr zu überleben beträgt $1 - q$, und die Wahrscheinlichkeit n Jahre zu überleben, ist $(1 - q)^n$. Aus $0 < 1 - q < 1$ folgt nun $\lim_{n\to\infty}(1 - q)^n = 0$.

Das bedeutet offensichtlich, dass niemand für immer lebt.

Jedoch schließt der Beweis mittels Grenzwert eine unvorstellbare Langlebigkeit in seltenen Fällen nicht aus. Wenn dem so ist, warum ist dann eine Langlebigkeit von, sagen wir 130 Jahren, niemals berichtet worden? Die Wahrscheinlichkeit einer 100-jährigen Frau 130 Jahre alt zu werden, beträgt $(1 - q)^{30}$ und die Wahrscheinlichkeit, nicht dieses Alter zu erreichen $1 - (1 - q)^{30} = 1 - 0{,}660859^{30} = 0{,}999996$. Somit wird die Wahrscheinlichkeit vor dem Erreichen des Alters von 130 zu sterben geradezu zur Gewissheit. Nichtsdestotrotz kann, wenigstens im Prinzip, ein Fall mit einer Chance von $4 \cdot 10^{-6}$ Fall eintreten, gegeben genügend Zeit und genügend viele Personen. Praktisch ist es noch nicht beurkundet worden wegen der begrenzten Bevölkerung und Zeit.

4 Die Endgültigkeit absorbierender Zustände

Bei n Bernoulli-Versuchen gilt, dass je weiter die Erfolgswahrscheinlichkeit p über ½ hinausgeht, umso wahrscheinlicher wird es, n Erfolge zu haben. In einer Population von n Hundertjährigen beträgt dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle innerhalb der nächsten 30 Jahre sterben $0{,}999996^n$. Die Anzahl der heute lebenden Hundertjährigen ist ziemlich niedrig, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass *alle* in dieser Zeitspanne sterben, immer noch hoch ist. Zum Beispiel, wenn $n = 100$, ist es 0,9996000 und für $n = 500$ ist es 0,980199. Ein Blick auf einen irgendwie analogen Prozess, der zum Ende kommt, kann uns helfen die Beschränktheit des Phänomens der Langlebigkeit besser zu verstehen.

Heuristisch mag man unser Problem aussehen wie eine Wette in n Versuchen zwischen Leben und Tod mit einem Kapital der Größe n. Ein Spieler ist ruiniert (Feller 1957, S. 311), wenn all sein Kapital zu seinem Gegner übergegangen ist. In diesem Wettbewerb ist „das Leben“ ruiniert und der Tod hat den „Jackpot“ geknackt, weil der letztere der Spieler ist, dessen Erfolgswahrscheinlichkeit p weit größer als ½ ist. Eine andere Vorstellung von diesem Problem bei Feller besteht darin, dass sich ein physikalisches Teilchen auf einer Irrfahrt (Random Walk) befindet und sich in jedem Schritt entweder nach rechts oder nach links bewegt. Die Irrfahrt endet, wenn das Teilchen das erste Mal auf eines der beiden absorbierenden Ränder trifft. In unserem Fall gibt es nur einen absorbierenden Rand, von dem es kein Zurück mehr gibt. Wegen der hohen Wahrscheinlichkeit, sich in diese Richtung zu bewegen, driften innerhalb einer begrenzten Zahl von Schritten alle n Teilchen erwartungsgemäß an diese Grenze.

Ein ähnliches Phänomen wurde auch von Genetikern beschrieben. Sie studieren die Fluktuation in der relativen Häufigkeit von zwei Allelen – unterschiedliche Formen von Genen – von Generation zu Generation innerhalb einer endlichen Population (Crow und Kimura 1970, S. 320). Mit voranschreitender Zeit entfernen sich die Allel-Häufigkeiten tendenziell immer weiter von ihren Ausgangswerten. Schließlich bleibt nur eines der Allele übrig, während das andere verloren ist und die Population wird reinerbig für dieses Gen, wobei diese Fixierung irreversibel ist.

Alles in allem kommt der oben beschriebene Prozess zu Ende aufgrund der Endlichkeit der Population, oft in Kombination mit ungleichen Wahrscheinlichkeiten für „Erfolg“ und „Misserfolg“. Dies gilt für den Ruin des Spielers mit Blick auf die Absorption am Rande ebenso wie für die Elimination eines Allels und für den Drift zum irreversiblen Zustand des Todes.

5 Schlussfolgerung

Die Tatsache, dass wir nicht ewig leben, ist für keinen Studenten neu. Gleichzeitig weisen die Bedenken des 25-jährigen Studenten bezüglich der Wahrscheinlichkeit l_{50} auf einige allgemeine Mängel im Verstehen von bedingten Wahrscheinlichkeiten und der Interpretation von Sterbetafeln hin. Sobald sich Studenten dieses Zeno-ähnlichen Paradoxons der Jagd des Todes nach dem menschlichen Lebens bewusst werden, mögen sie Interesse an Analysen wie der obigen finden. Der spielerische Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen kann über die Behandlung des genauen demographischen Kontextes hinaus instruktiv sein. Derartige Übungen sollten uns daran erinnern, dass die Schlussfolgerungen probabilistisch sind. Langlebigkeit über das Jahr 130 hinaus kann nicht ganz ausgeschlossen werden; nur ist ihre Wahrscheinlichkeit so gering, dass es bisher wohl noch nicht eingetreten ist. Aber Ungewissheiten durchdringen letztendlich all unsere Modellierungen.

Danksagung

Ich danke Raphael Falk für kritische Kommentare und Einsichten

Literatur

CROW, J. F.; KIMURA, M. (1970): An Introduction to Population Genetics Theory. New York: Harper & Row.

FALK, R. (1993): Understanding Probability and Statistics: A Book of Problems. Wellesley, MA: AK Peters.

FELLER, W. (1957): An Introduction to Probability Theory and its Applications (Vol. 1, 2nd edn). New York: Wiley

UK Statistics Authority (2006): Interim life tables, United Kingdom (based on data for the years 2003-2005). *http://www.statistics.gov.uk/downloads/theme_population/Interim_Life/Superseded_ILTs_Nov06.zip* (file ILTUK0305.xls) (Zugriff 26.1.2009)

Wikipedia, the Free Encyclopedia: Online (o. D.). Longevity_myths (Zugriff 26. Januar 2009)

Anschrift der Verfasserin

Ruma Falk
Hebrew University
Jerusalem
Israel
rfalk@cc.huji.ac.il

Anhang:

Sterbetafel für Deutschland aus dem Jahre 2005/2006 (Quelle: Statistisches Bundesamt)

	Frauen		Männer	
Alter	*100000 l_x*	*e_x*	*100000 l_x*	*e_x*
0	100 000	82,25	100 000	76,89
1	99 654	81,54	99 573	76,22
2	99 625	80,56	99 537	75,25
3	99 607	79,58	99 519	74,27
4	99 594	78,59	99 502	73,28
5	99 583	77,59	99 487	72,29
6	99 574	76,60	99 474	71,30
7	99 565	75,61	99 463	70,31
8	99 557	74,61	99 453	69,31
9	99 550	73,62	99 442	68,32
10	99 543	72,62	99 432	67,33
11	99 535	71,63	99 424	66,33
12	99 526	70,64	99 414	65,34
13	99 518	69,64	99 401	64,35
14	99 507	68,65	99 389	63,36
15	99 494	67,66	99 374	62,36
16	99 480	66,67	99 355	61,38
17	99 466	65,68	99 323	60,40
18	99 448	64,69	99 287	59,42
19	99 424	63,71	99 227	58,45
20	99 400	62,72	99 166	57,49
21	99 378	61,73	99 103	56,53
22	99 357	60,75	99 041	55,56
23	99 333	59,76	98 980	54,59
24	99 308	58,78	98 920	53,63
25	99 287	57,79	98 860	52,66
26	99 264	56,80	98 799	51,69
27	99 241	55,82	98 734	50,73
28	99 217	54,83	98 672	49,76
29	99 193	53,84	98 609	48,79
30	99 164	52,86	98 546	47,82
31	99 133	51,87	98 482	46,85
32	99 101	50,89	98 410	45,88
33	99 066	49,91	98 338	44,92
34	99 027	48,93	98 261	43,95
35	98 988	47,95	98 179	42,99
36	98 942	46,97	98 092	42,03
37	98 891	45,99	97 998	41,07
38	98 836	45,02	97 898	40,11
39	98 778	44,04	97 785	39,15
40	98 706	43,08	97 657	38,20
41	98 630	42,11	97 512	37,26
42	98 544	41,15	97 355	36,32
43	98 441	40,19	97 178	35,38
44	98 329	39,23	96 973	34,46
45	98 210	38,28	96 742	33,54
46	98 064	37,34	96 487	32,63
47	97 906	36,40	96 202	31,72
48	97 730	35,46	95 880	30,83
49	97 540	34,53	95 520	29,94
50	97 329	33,60	95 126	29,06
51	97 094	32,68	94 699	28,19
52	96 845	31,76	94 220	27,33
53	96 572	30,85	93 698	26,48
54	96 276	29,95	93 140	25,64
55	95 962	29,04	92 527	24,80
56	95 611	28,15	91 869	23,98
57	95 237	27,26	91 160	23,16

58	94 831	26,37	90 431	22,34
59	94 391	25,49	89 605	21,54
60	93 937	24,61	88 741	20,75
61	93 425	23,74	87 802	19,97
62	92 871	22,88	86 803	19,19
63	92 292	22,02	85 709	18,43
64	91 678	21,17	84 538	17,68
65	91 046	20,31	83 316	16,93
66	90 357	19,46	81 973	16,20
67	89 615	18,62	80 548	15,48
68	88 797	17,79	79 025	14,76
69	87 906	16,96	77 393	14,07
70	86 908	16,15	75 644	13,38
71	85 802	15,35	73 732	12,71
72	84 571	14,57	71 659	12,07
73	83 192	13,80	69 437	11,44
74	81 689	13,05	67 091	10,82
75	80 014	12,31	64 532	10,23
76	78 142	11,59	61 790	9,66
77	76 063	10,89	58 885	9,11
78	73 791	10,21	55 847	8,58
79	71 278	9,56	52 671	8,07

80	68 509	8,92	49 433	7,56
81	65 430	8,32	46 056	7,08
82	62 089	7,74	42 563	6,62
83	58 479	7,19	38 970	6,19
84	54 557	6,67	35 307	5,78
85	50 436	6,17	31 615	5,39
86	45 924	5,73	27 899	5,04
87	41 412	5,30	24 349	4,70
88	36 844	4,89	20 986	4,38
89	32 443	4,49	17 933	4,04
90	27 973	4,13	15 015	3,73
91	23 552	3,81	12 269	3,45
92	19 365	3,52	9 703	3,23
93	15 469	3,29	7 499	3,03
94	12 089	3,07	5 679	2,84
95	9 206	2,87	4 209	2,66
96	6 822	2,70	3 038	2,49
97	4 960	2,52	2 133	2,34
98	3 504	2,36	1 454	2,20
99	2 402	2,21	962	2,07
100	1 596	2,08	616	1,95